

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES



61.13 – Análisis Matemático III C

TRABAJO PRACTICO

TÍTULO: *Diseño de un generador eólico*

PROFESOR: Ing. Carlos A. Crenovich

ALUMNO: Joaquín Ignacio Aramendía

PADRON: 87651

- 2° CUATR. 2008 -

Diseño de un generador eólico

Análisis teórico del problema aerodinámico

Para el presente trabajo se desarrollo una teoría sobre la mecánica de fluidos basada en un flujo incompresible, irrotacional y de viscosidad despreciable (no viscoso). Bajo éstas hipótesis es válido el tratamiento del flujo de aire sobre las palas de la turbina como un flujo potencial.

Definiciones y teoremas utilizados

Se define la velocidad como una funcion (vectorial) dependiente del punto (x, y, z) y del tiempo. En nuestro caso suponemos el flujo como estacionario de forma que la derivada parcial de la velocidad respecto del tiempo es nula.

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{flujo estacionario}$$

Considerando el flujo como incompresible se cumple que sobre una superficie de control el flujo del vector velocidad es nulo (entra la misma masa que sale del volumen de control). Aplicando el teorema de la divergencia, significa que la integral sobre ese volumen de control de la divergencia de la velocidad es nula. Como se puede elegir el volumen de control arbitrariamente significa que para que la integral sea nula debe ser nulo el integrando, de forma que la divergencia del vector velocidad es nula en todo punto.

$$\int_S \vec{V}(x, y, z, t) \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{Vol} \text{div}(\vec{V}) \cdot dv = 0$$

$$\Rightarrow \text{div}(\vec{V}) = 0 \rightarrow \text{flujo incompresible}$$

Si el flujo considerado es irrotacional implica que la circulación sobre una curva cerrada del vector velocidad debe ser nula. Aplicando el teorema del rotor significa que el rotor del vector velocidad es nulo para todo punto entonces la función de velocidad deriva de una función potencial de manera que:

$$\oint_C \vec{V}(x, y, z, t) \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_S \text{rot}(\vec{V}) \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\Rightarrow \text{rot}(\vec{V}) = 0 \rightarrow \text{flujo irrotacional}$$

$$\text{rot}(\vec{V}) = \nabla \times \vec{V} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{V} = \vec{\nabla} \Phi(x, y, z) = \Phi_x \vec{i} + \Phi_y \vec{j} + \Phi_z \vec{k}$$

$$\text{div}(\vec{V}) = 0 \Rightarrow \text{div}(\vec{\nabla} \Phi(x, y, z)) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \Phi(x, y, z) = 0$$

Como el flujo es irrotacional e incompresible se desprende que la función potencial de la que se deriva la velocidad es armónica.

Flujo bidimensional

En nuestro caso se considera que el flujo en la coordenada z es nulo, de ésta manera se puede tratar el flujo como bidimensional.

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y)$$

Escrita de ésta forma se define la velocidad compleja como un número complejo cuyas coordenadas son las componentes del vector velocidad.

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y)$$

$$V = V_1 + iV_2$$

Función Potencial complejo

Como estamos considerando el flujo como irrotacional e incompresible podemos asegurar que existe una función potencial cuyo gradiente es la velocidad y además que la función es armónica.

Entonces existe su armónica conjugada que representaran las líneas de flujo del potencial complejo.

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y) = \vec{\nabla}\Phi = \Phi_x \vec{i} + \Phi_y \vec{j}$$

$$V = \Phi_x + i\Phi_y$$

$$\nabla^2\Phi = 0 \Rightarrow \Phi \in \text{Arm} \Rightarrow \exists \Psi \text{ armónica conjugada de } \Phi$$

$$\Rightarrow \exists \Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \text{ función potencial complejo}$$

Por la construcción de la función Ω se puede demostrar que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann (por ser Ψ conjugada armónica de Φ) entonces Ω es una función holomorfa y se cumple:

$$\Omega'(z) = \Phi_x + i\Psi_x$$

$$V = \Phi_x + i\Phi_y = \Phi_x - i\Psi_x$$

$$\Rightarrow V = \overline{\Omega'(z)}$$

Teorema de Blasius

Al ser el flujo no viscoso se demuestra que cualquier obstáculo que se interponga en el fluido es una línea de corriente y la fuerza que ejerce el fluido sobre la superficie del objeto es siempre perpendicular a ésta (la fuerza de rozamiento es nula).

Sobre una línea de corriente se cumple la ecuación de Bernoulli y si el flujo es irrotacional es válida en toda la masa de fluido. De éstas hipótesis se desprende el teorema de Blasius que nos permite calcular la fuerza ejercida sobre un cuerpo interpuesto en un flujo irrotacional y no viscoso (por unidad de longitud) conocida su función potencial.

$$V = \overline{\Omega'(z)}$$

$$|dF| = p|dz|$$

$$dF = i \cdot p \cdot dz$$

$$\Rightarrow F = i \oint_{\gamma} p \cdot dz$$

Por la ecuación de Bernoulli se tiene (sobre la línea de corriente γ):

$$p + \frac{1}{2}\rho|V|^2 = \text{cte.}$$

$$\Rightarrow F = i \cdot \oint_{\gamma} \left(\text{cte} - \frac{1}{2}\rho|V|^2 \right) \cdot dz =$$

$$= i \cdot \oint_{\gamma} \text{cte} \cdot dz - i \cdot \oint_{\gamma} \frac{1}{2}\rho|V|^2 \cdot dz = -i \cdot \frac{1}{2}\rho \oint_{\gamma} |V|^2 \cdot dz$$

$$dz = |dz| \cdot e^{i\varphi}$$

$$F = -i \cdot \frac{1}{2}\rho \oint_{\gamma} \frac{V^2}{e^{i2\varphi}} \cdot |dz| \cdot e^{i\varphi} = -i \cdot \frac{1}{2}\rho \oint_{\gamma} V^2 \cdot |dz| \cdot e^{-i\varphi}$$

$$\Rightarrow \bar{F} = i \cdot \frac{1}{2}\rho \oint_{\gamma} \bar{V}^2 \cdot \overline{|dz| \cdot e^{-i\varphi}} = i \cdot \frac{1}{2}\rho \oint_{\gamma} \bar{V}^2 \cdot dz$$

Reemplazando la velocidad conjugada por la derivada del potencial se obtiene la ecuación del teorema de Blasius.

$$\bar{F} = i \cdot \frac{1}{2}\rho \oint_{\gamma} (\Omega'(z))^2 \cdot dz$$

Transformación de Kutta-Joukovsky

En éste trabajo se utiliza una transformación conforme que transforma una circunferencia desplazada del origen en un perfil aerodinámico llamada transformación de Kutta-Joukovsky. Esta transformación es conforme en todo punto salvo en el origen dado que la función no es holomorfa en ese punto.

$$w = z + \frac{a^2}{z}$$

Soluciones Particulares

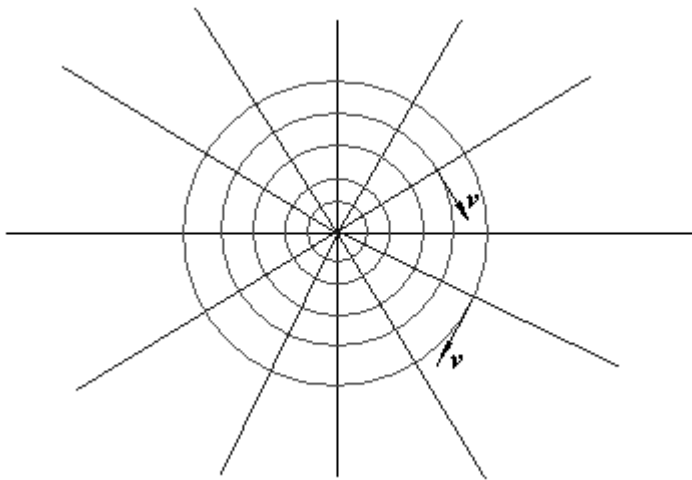
Torbellino Horario

$$\Omega(z) = \frac{i\gamma}{2\pi} \ln z$$

$$\Omega(z) = i \frac{\gamma}{2\pi} (\ln|z| + i \arg z) = -\frac{\gamma}{2\pi} \arg z + i \frac{\gamma}{2\pi} \ln|z|$$

Equipotenciales $\phi(x, y) = -\frac{\gamma}{2\pi} \arg z = cte \Rightarrow \arg z = cte$

Líneas de Flujo $\psi(x, y) = \frac{\gamma}{2\pi} \ln|z| = cte \Rightarrow |z| = cte$



Cuerpo de Sección Circular inmerso en un fluido con velocidad V_0 ($\alpha=0$)

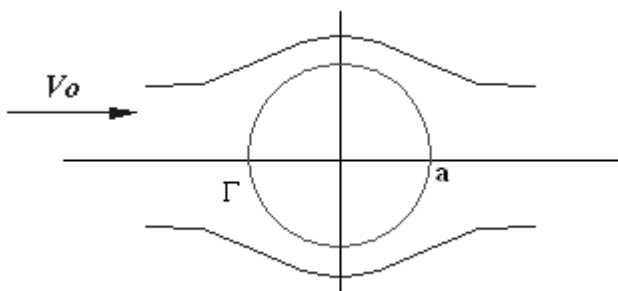
$$w = z + \frac{a^2}{z}$$

$$z = ae^{i\varphi}$$

$$w = ae^{i\varphi} + \frac{a^2}{ae^{i\varphi}} = ae^{i\varphi} + ae^{-i\varphi} = a(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = 2a \cos \varphi$$

$$V = V_0 = \overline{\Omega'(w)}$$

$$\Omega(w) = V_0 w \quad \therefore \quad \Omega(z) = V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$



Cuerpo de Sección Circular ($\alpha=0$) + Torbellino de Aire

$$\Omega(z) = Vo \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{i\gamma}{2\pi} \ln z$$

$$\Omega'(z) = Vo \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{i\gamma}{2\pi \cdot z}$$

$$\overline{F} = \frac{i\delta}{2} \oint_{\Gamma} \left[Vo \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{i\gamma}{2\pi \cdot z} \right]^2 dz$$

$$\overline{F} = \frac{i\delta}{2} \oint_{\Gamma} \left[Vo^2 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right)^2 + 2Vo \cdot \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \frac{i\gamma}{2\pi \cdot z} - \frac{\gamma^2}{4\pi^2 z^2} \right] dz$$

$$\overline{F} = \frac{i\delta}{2} \left[\oint_{\Gamma} Vo^2 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right)^2 dz + 2Vo \cdot \oint_{\Gamma} \frac{i\gamma}{2\pi \cdot z} dz - \oint_{\Gamma} \frac{2Vo \cdot a^2 i\gamma}{2\pi \cdot z^3} dz - \oint_{\Gamma} \frac{\gamma^2}{4\pi^2 z^2} dz \right]$$

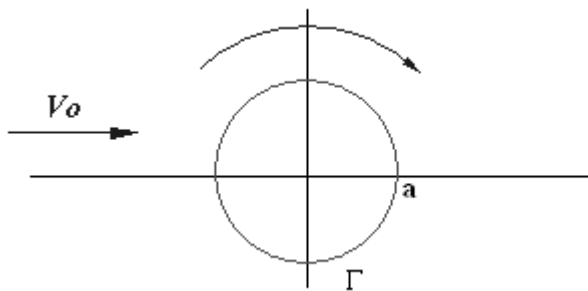
$$\oint_{\Gamma} Vo^2 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right)^2 dz = 0 \quad \Leftarrow \text{Serie de Laurent} \quad R_{zo} = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{i\gamma}{2\pi \cdot z} dz = \frac{i\gamma}{2\pi} \quad \Leftarrow \text{Polo de 1}^{\text{er}} \text{ Orden} \quad R_{zo} = \frac{i\gamma}{2\pi} \lim_{z \rightarrow zo} \frac{1}{z} z = \frac{i\gamma}{2\pi}$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{2Vo \cdot a^2 i\gamma}{2\pi \cdot z^3} dz = 0 \quad \Leftarrow \text{Polo de 3}^{\text{er}} \text{ Orden} \quad R_{zo} = \lim_{z \rightarrow zo} \frac{d}{dz^2} \frac{Vo \cdot a^2 i\gamma}{\pi} \frac{1}{z^3} z^3 = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{\gamma^2}{4\pi^2 z^2} dz = 0 \quad \Leftarrow \text{Polo de 2}^{\text{do}} \text{ Orden} \quad R_{zo} = \lim_{z \rightarrow zo} \frac{d}{dz} \frac{\gamma^2}{4\pi^2 z^2} z^2 = 0$$

$$\therefore \quad \overline{F} = \frac{i\delta}{2} 2Vo \cdot \oint_{\Gamma} \frac{i\gamma}{2\pi \cdot z} dz = i\delta \cdot Vo \cdot \frac{i\gamma}{2\pi} = -i\delta \cdot Vo \gamma \quad \Rightarrow \quad F = i\delta \cdot Vo \cdot \gamma \cdot l$$



Cuerpo de Sección Circular ($\alpha \neq 0$) inmerso en un fluido de velocidad Vo

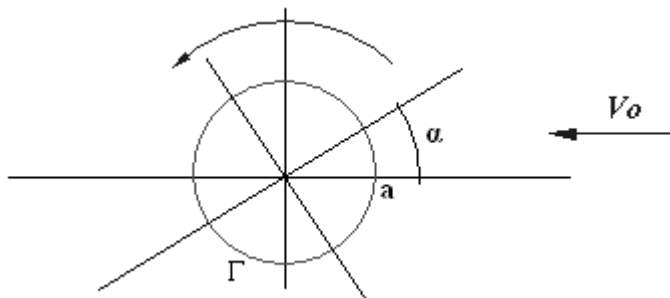
$$z^{(1)} = ze^{i\alpha}$$

$$\Omega(z^{(1)}) = -V_0 \left(z^{(1)} + \frac{a^2}{z^{(1)}} \right) - \frac{i\gamma}{2\pi} \ln z^{(1)}$$

$$\Omega(z) = -V_0 \left(ze^{i\alpha} + \frac{a^2}{ze^{i\alpha}} \right) - \frac{i\gamma}{2\pi} \ln ze^{i\alpha}$$

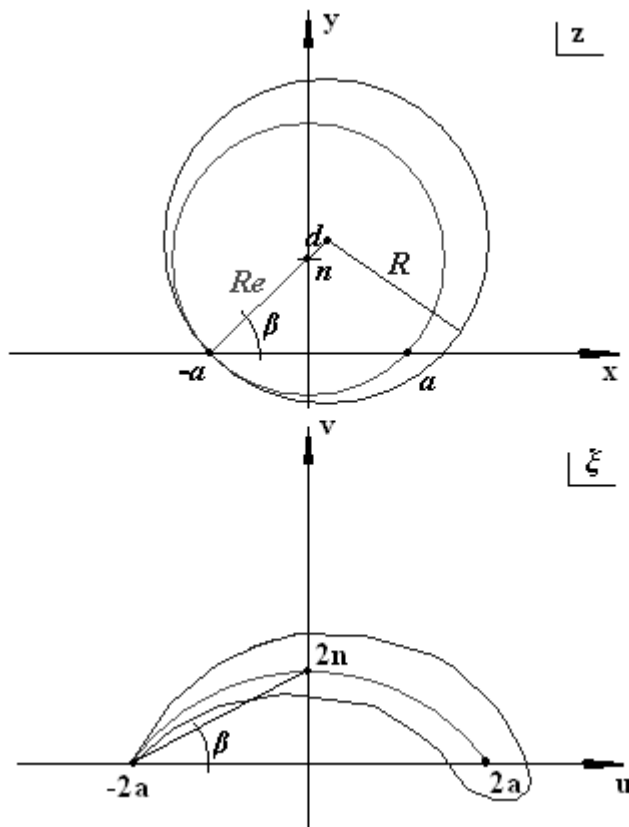
$$\ln ze^{i\alpha} = \ln z + \ln e^{i\alpha} \quad \ln e^{i\alpha} = \text{cte} \quad \text{desaparece al derivar}$$

$$\Rightarrow \Omega(z) = -V_0 \left(ze^{i\alpha} + \frac{a^2}{ze^{i\alpha}} \right) - \frac{i\gamma}{2\pi} \ln z$$



Perfil Aerodinámico

Se define entonces una circunferencia desplazada y aplicamos la transformación.



$$R_e = \sqrt{a^2 + m^2}$$

$$R = \sqrt{a^2 + m^2} + d$$

$$\operatorname{tg} \beta = m/a$$

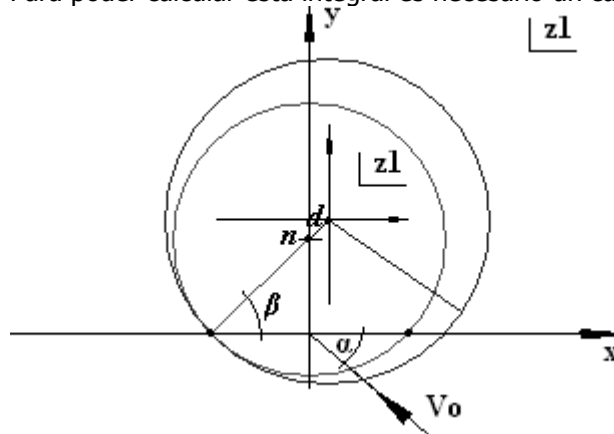
$$\xi = z + \frac{a^2}{z}$$

Puede verse que la circunferencia de radio R_e se transforma en el "esqueleto" del perfil aerodinámico y se puede demostrar que es un arco de circunferencia. La circunferencia exterior de radio R se transforma en el perfil aerodinámico.

Según el teorema de Blasius la fuerza ejercida sobre el perfil será:

$$\bar{F} = \frac{i\rho}{2} \oint_{\Gamma} (\Omega'(\xi))^2 d\xi$$

Para poder calcular esta integral es necesario un cambio de variable:



$$z = z^{(1)} + d \cdot \cos \beta + i(n + d \cdot \operatorname{sen} \beta)$$

$$z^{(1)} = z - d \cdot \cos \beta - i(n + d \cdot \operatorname{sen} \beta)$$

$$\xi = z + \frac{a^2}{z}$$

De donde es conocido el potencial complejo para la variable $z^{(1)}$ así como la velocidad expresada como derivadas de funciones compuestas.

$$\Omega(z^{(1)}) = -V_0 \left(z^{(1)} e^{i\alpha} + \frac{R^2}{z^{(1)} e^{i\alpha}} \right) - \frac{i\gamma}{2\pi} \ln z^{(1)}$$

$$\bar{V} = \frac{d\Omega}{d\xi} = \frac{d\Omega}{dz^{(1)}} \frac{dz^{(1)}}{dz} \frac{dz}{d\xi}$$

$$\frac{d\Omega}{dz^{(1)}} = -V_0 \left(e^{i\alpha} - \frac{R^2}{z^{(1)2} e^{i\alpha}} \right) - \frac{i\gamma}{2\pi z^{(1)}}$$

$$\frac{dz^{(1)}}{dz} = 1 \quad \Leftarrow \quad z^{(1)} = z - d \cdot \cos \beta - i(n + d \cdot \operatorname{sen} \beta)$$

Aquí es necesario destacar que la velocidad debe ser finita en todo punto, analizando los puntos singulares de la derivada de z respecto de ξ se desprende que tiende a infinito cuando z tiende a $(-a)$. Para salvar este problema y que la velocidad sea finita en ese punto la derivada del potencial complejo respecto de la variable z^1 debe anularse en ese punto. De esta manera se puede calcular fácilmente el valor de la circulación que genera el perfil (γ).

$$\Omega'(-R.e^{i\beta}) = -V_o \left(e^{i\alpha} - \frac{R^2}{R^2 e^{2i\beta}} e^{i\alpha} \right) + \frac{i\gamma}{2\pi R e^{i\beta}} = 0 \quad \Leftarrow \quad \frac{dz}{d\xi} \xrightarrow{z \rightarrow -a} \infty$$

$$V_o \left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} e^{-2i\beta} \right) = \frac{i\gamma}{2\pi R e^{i\beta}}$$

$$R \cdot V_o \left(e^{i\alpha} e^{i\beta} - e^{-i\alpha} e^{-i\beta} \right) = \frac{i\gamma}{2\pi}$$

$$\gamma = 2\pi R \cdot V_o \left(e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)} \right)$$

$$\gamma = 4\pi R \cdot V_o \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)$$

Entonces es posible calcular la integral de Blasius para averiguar la fuerza ejercida por el perfil.

$$\bar{F} = \frac{i\rho}{2} \oint_{\Gamma} (\Omega'(\xi))^2 d\xi$$

$$\bar{F} = \frac{i\rho}{2} \oint_{\Gamma} (\Omega'(z))^2 \cdot \xi'(z) \cdot dz$$

$$\bar{F} = \frac{i\rho}{2} \oint_{\Gamma} (\Omega'(z))^2 \cdot \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \cdot dz \quad \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \quad \text{no aporta Residuos}$$

$$\bar{F} = \frac{i\rho}{2} \oint_{\Gamma} (\Omega'(z))^2 dz = i \cdot \delta \cdot V_o \cdot \gamma \cdot l$$

$$F = \rho \cdot V_o \cdot \gamma \cdot l$$

$$F = \rho \cdot V_o \cdot l \cdot 4\pi R \cdot V_o \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)$$

$$F = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_o^2 \cdot l \left(\sqrt{a^2 + n^2} + d \right) \text{sen}(\alpha + \beta)$$

$$F = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_o^2 \cdot a \cdot l \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{n}{a} \right)^2} + \frac{d}{a} \right) \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)$$

$$F = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot V_o^2 \cdot a \cdot l \cdot \left(\sqrt{1 + (\text{tg}\beta)^2} + \frac{d}{a} \right) \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)$$

Consideraciones sobre potencia del viento

Teorema de Betz

Para calcular las dimensiones que debe tener la turbina es necesario saber qué cantidad de viento debe pasar por ella y cuanto de éste es aprovechable como energía mecánica. Para ello se considera la potencia del viento que fluye por un cilindro de radio 'D' siendo su área:

$$A = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

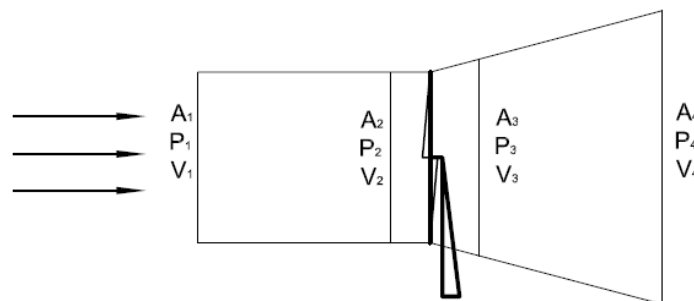
La energía de ese tubo de viento es:

$$E = \frac{1}{2} m \cdot V^2$$

Y su potencia:

$$P = \frac{E}{t} = \frac{1}{2} \frac{m}{t} \cdot V^2 = \frac{A \cdot \rho \cdot V}{2} \cdot V^2 = A \cdot \rho \cdot \frac{V^3}{2}$$

Considerando la interposición de la turbina en el túnel de viento se pueden considerar cuatro secciones, una muy alejada de la turbina donde la velocidad del viento se considera igual a la que existe si la turbina no estuviese (1), una muy alejada de la turbina (4), pero después de ésta donde la velocidad será modificada pero la presión será la misma que en la primer sección (P_{atm}). Una sección justo antes de la turbina (2) y una justo después (3) donde no se puede inferir que pasa en el medio pues se le extrae una cierta potencia al tubo de viento.



De ésta manera se puede aplicar la ecuación de Bernoulli entre las secciones 1 y 2 y entre las secciones 3 y 4 (pero no entre las secciones 2 y 3):

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

$$P_3 + \frac{1}{2} \rho V_3^2 = P_4 + \frac{1}{2} \rho V_4^2$$

Siendo el flujo másico en todas las secciones el mismo y que la presión estática de la sección 1 es la misma que la sección 4

$$P_1 = P_4 = P$$

$$A_1 \rho V_1 = A_2 \rho V_2 = A_3 \rho V_3 = A_4 \rho V_4$$

$$\Rightarrow A_2 \cong A_3 \Rightarrow V_2 \cong V_3 = V$$

$$P_2 = P + \frac{1}{2} \rho V_1^2 - \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$P_3 = P + \frac{1}{2} \rho V_4^2 - \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$P_2 - P_3 = \frac{1}{2} \rho (V_1^2 - V_4^2)$$

$$F = (P_2 - P_3)A = \frac{1}{2}\rho(V_1^2 - V_4^2)A$$

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_1^2 d(mv) \Rightarrow F = \frac{(mv)_2 - (mv)_1}{(t_2 - t_1)}$$

$$F = \rho V_1 A_1 V_1 - \rho V_4 A_4 V_4$$

$$\rho V A (V_1 - V_4) = F = \frac{1}{2}\rho A (V_1^2 - V_4^2) \Rightarrow V = \frac{(V_1 + V_4)}{2}$$

De aquí se puede calcular la potencia útil:

$$Pot_u = F \cdot V = \frac{1}{2}\rho A (V_1^2 - V_4^2) \frac{(V_1 + V_4)}{2}$$

Que comparando con el resultado anterior de potencia se puede definir un rendimiento:

$$\eta = \frac{Pot_u}{Pot} = \frac{\frac{1}{2}\rho A (V_1^2 - V_4^2) \frac{(V_1 + V_4)}{2}}{\frac{1}{2}\rho A V_1^2} = \frac{\left[1 - \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^2\right] \left(1 + \frac{V_4}{V_1}\right)}{2}$$

$$\alpha = \frac{V_4}{V_1}$$

$$\eta = \frac{[1 - \alpha^2](1 + \alpha)}{2}$$

Para averiguar el rendimiento máximo se deriva la expresión respecto de la variable ' α ' e igualando a cero:

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = \frac{-2\alpha(1 + \alpha) + 1 - \alpha^2}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

Y con este valor se saca el rendimiento máximo, llamado rendimiento de Betz, utilizado para dimensionar la turbina.

$$\eta = \frac{\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] \left(1 + \frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{16}{27} \cong 0.592$$

Análisis teórico del problema estructural

En el presente trabajo se calculará estructuralmente la turbina basándose en un análisis estático y un análisis dinámico para calcular las frecuencias naturales de oscilación de las partes más importantes del generador. Para todo el desarrollo se toma como hipótesis que las deformaciones son elásticas, donde es válida la ley de Hooke.

Problema estático

Viga sometida a esfuerzo axial



Dada una configuración de una viga empotrada en un extremo y cargada en el otro con una carga según su eje se define la tensión en cada sección como la carga dividida el área de la sección.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

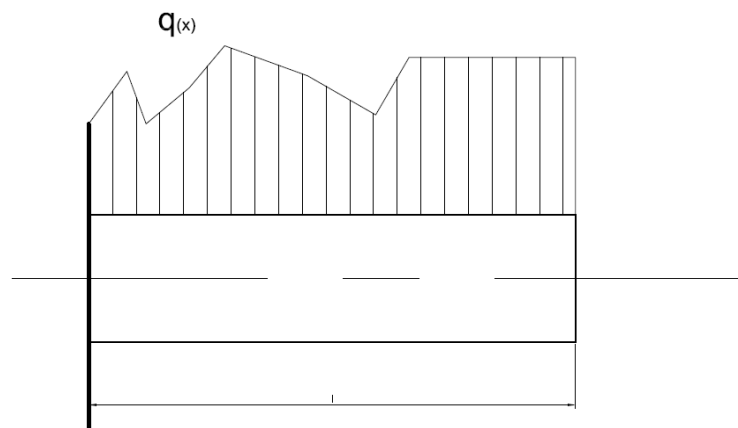
Esta carga dará lugar a una deformación que se puede escribir en términos específicos dividiendo la deformación total por la longitud de la viga, a este cociente se lo denomina alargamiento específico o deformación específica:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Existe una proporcionalidad entre la deformación específica y la tensión aplicada dada por una constante del material (su módulo de elasticidad, o módulo de Young) que da lugar a la ley de Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Viga sometida a flexión



Dada una viga con una carga en función de su longitud se define el esfuerzo de corte como la integral de la carga distribuida:

$$Q = \int_0^x q(x) dx$$

Y el momento flexor como la integral del esfuerzo de corte:

$$M = \int_0^x Q(x) dx$$

Bajo la hipótesis de que en la flexión la sección se mantiene plana y gira respecto de un eje llamado neutro (donde no existe tensión) se asimila el perfil de tensiones sobre una sección como un perfil lineal:

$$\sigma = \frac{\sigma_M}{y_M} y$$

Entonces se tiene para un diferencial de área de sección un diferencial de fuerza, integrando ese diferencial de fuerza multiplicado por la distancia al eje neutro, se obtiene el momento flexor en esa sección, lo que permite relacionar el momento en la sección con la tensión máxima aplicada:

$$dF = \sigma \cdot dA$$

$$dM = dF \cdot y = \sigma \cdot dA \cdot y = \frac{\sigma_M}{y_M} y^2 dA$$

$$M = \frac{\sigma_M}{y_M} \int_A y^2 dA = \frac{\sigma_M}{y_M} \cdot J$$

Donde J es el momento de inercia de la sección respecto de la línea del eje neutro (perpendicular al plano de aplicación del momento flexor). De ésta forma se obtiene una expresión para verificar la sección a flexión conocidos su momento flexor y su momento de inercia, lo que nos permite dimensionar la sección.

$$\sigma_M = \frac{M}{J} y$$

Curva elástica de una viga en flexión

Conocidas las deformaciones específicas máximas en las distintas secciones de la viga es posible determinar el ángulo de curvatura de la viga. Considerando que las secciones se mantienen planas luego de deformadas, el ángulo de curvatura será el determinado por dos secciones de la viga.

$$\varepsilon_M = \frac{\sigma_M}{E}$$

$$\Delta dx = \varepsilon_M dx$$

$$d\varphi = \frac{\sigma_M}{E} \cdot \frac{dx}{y_M} = \frac{M}{E \cdot J} \frac{y_M}{y_M} dx = \frac{M}{E \cdot J} dx$$

$$\varphi = \arctan(y')$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2}$$

Considerando las deformaciones muy pequeñas se puede despreciar la derivada primera de 'y' al estar elevada al cuadrado frente a 1, esto permite aproximar el ángulo a la tangente entonces es posible escribir:

$$\varphi = y'$$

Y por las relaciones anteriores se tiene:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot J}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{Q}{E \cdot J}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q(x)}{E \cdot J}$$

Ecuaciones que nos permiten, integrando, conocer la curva elástica de la viga conocida la carga distribuida sobre ésta.

Problema dinámico (vibraciones en sólidos)

El problema dinámico consiste en determinar las frecuencias de oscilación naturales de cada elemento estructural básico del generador (palas y columna) a fin de evitar que el funcionamiento normal del mismo lo lleve a una falla.

Es preciso determinar las frecuencias de oscilación axiales en la columna para que no entre en resonancia debido a la velocidad de giro de la hélice y algún desbalance estático en el centro de masa de la misma. Así mismo es necesario determinar las vibraciones de flexión en la columna con los mismos fines. En las palas es preciso hacer un análisis de las frecuencias naturales de vibración en flexión, dado que cada vez que una pala se enfrenta con la columna del generador produce una reducción en la sustentación que lleva a que el momento flector caiga súbitamente.

Vibraciones axiales no forzadas (frecuencias naturales)

Cuando la carga sobre el extremo de la viga empotrada varía en el tiempo la deformación será función no sólo de la posición sino también del tiempo por la ley de Hooke. Llamando 'y' a la función de desplazamiento para una posición 'x' a un tiempo 't', entonces la variación de 'y' está determinada por:

$$y = y(x, t)$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x, t) - y(x, t)$$

Siendo la deformación específica 'ε' el cociente de la deformación y la longitud inicial:

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y = y(x + \Delta x, t) - y(x, t)}{\Delta x}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\varepsilon = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Entonces la tensión aplicada en una sección 'x' será:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \frac{\partial y}{\partial x}$$

Analizando la fuerza sobre el mismo elemento de barra 'Δx':

$$F_1 = \sigma(x, t) \cdot A$$

$$F_2 = \sigma(x + \Delta x, t) \cdot A$$

Donde A es el área de la sección de la barra. Por la segunda ley de Newton se tiene:

$$F_2 - F_1 = m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$A \cdot [\sigma(x + \Delta x, t) - \sigma(x, t)] = A \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$A \cdot E \cdot \left[\frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \right] = A \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\left[\frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \right]}{\Delta x} = \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$c^2 = \frac{E}{\rho}$$

Entonces la función de desplazamiento corresponde a una ecuación de onda unidimensional, en este caso longitudinal. La resolución de ésta ecuación es posible por separación de variables de la siguiente forma, planteando una solución como el producto de dos funciones de una sola variable:

$$y = X(x) \cdot T(t)$$

$$T'' \cdot X = c^2 \cdot X'' \cdot T$$

Sin pérdida de generalidad se aplicarán las siguientes condiciones de contorno:

$$y(0, t) = 0$$

$$\sigma(l, t) = 0 \Rightarrow y(l, t) = 0$$

$$y_t(x, 0) = 0$$

$$y(x, 0) = \frac{\Delta l}{l} x$$

Lo que da lugar a un problema de Sturm-Liouville en la variable 'x':

$$y(0, t) = X_{(0)} T_{(t)} = 0 \Rightarrow X_{(0)} = 0$$

$$y(l, t) = X_{(l)} T_{(t)} = 0 \Rightarrow X_{(l)} = 0$$

$$y_t(x, 0) = X_{(x)} T'_{(0)} = 0 \Rightarrow T'_{(0)} = 0$$

$$y(x, 0) = \frac{\Delta l}{l} x$$

Separando las variables:

$$T'' \cdot X = c^2 \cdot X'' \cdot T$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\lambda$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T'' + \lambda c^2 T = 0 \end{cases}$$

Cuya solución en 'X' es la combinación lineal de exponenciales que puede escribirse en forma de senos y cosenos:

$$X(x) = A \sin(\sqrt{\lambda} x) + B \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

$$X(0) = B = 0$$

$$X(l) = A \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} l = n\pi$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

Siendo ' λ_n ' los autovalores del problema. La función ' T ' tendrá una forma similar, de lo que se puede escribir a ' y ' como una serie de Fourier.

$$T(x) = C \sin(\sqrt{\lambda} ct) + D \cos(\sqrt{\lambda} ct)$$

$$T'(0) = C = 0$$

$$y(x, t)_n = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l} ct\right)$$

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l} ct\right)$$

$$y(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = \frac{\Delta l}{l} x$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{\int_0^l \frac{\Delta l}{l} x \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cdot dx}{\left\| \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \right\|^2} = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\Delta l}{l} x \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cdot dx$$

Sin embargo no es necesario determinar los valores de los coeficientes pues las frecuencias naturales de oscilación se pueden sacar del término que multiplica a la variable ' t '

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} c = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Vibraciones axiales de una columna con una masa concentrada (frecuencias naturales)

En nuestro caso deben considerarse las vibraciones naturales de la columna con la masa de toda la maquinaria del rotor supuesta concentrada en el extremo. Es preciso que las frecuencias naturales no se encuentren en el rango de giro de la hélice de la turbina.

Se supone toda la masa de la hélice y de generador concentrada en el extremo de la columna como una masa ' m '. En este caso se tiene las siguientes condiciones:

$$F = \sigma \cdot A = E \cdot A \cdot y_x(l, t) = -m \cdot y_{tt}(l, t)$$

$$y(0, t) = 0$$

$$y_t(x, 0) = 0$$

$$y(x, t) = X(x) T(t)$$

$$T'' \cdot X = c^2 \cdot X'' \cdot T$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\lambda$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T'' + \lambda c^2 T = 0 \end{cases}$$

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

$$X(0) = C_2 = 0$$

$$T(t) = C_3 \sin(\sqrt{\lambda}ct) + C_4 \cos(\sqrt{\lambda}ct)$$

$$T'(0) = C_3 = 0$$

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$T(t) = C_4 \cos(\sqrt{\lambda}ct)$$

$$E \cdot A \cdot y_x(l, t) = -m \cdot y_{tt}(l, t)$$

$$E \cdot A \cdot X'_{(l)} \cdot T_{(t)} = -m \cdot X_{(l)} \cdot T''_{(t)}$$

$$E \cdot A \cdot X'_{(l)} \cdot C_4 \cos(\sqrt{\lambda}ct) = m \cdot X_{(l)} \cdot \lambda \cdot c^2 \cdot C_4 \cos(\sqrt{\lambda}ct)$$

$$E \cdot A \cdot \sqrt{\lambda} \cdot C_1 \cos(\sqrt{\lambda}l) = m \cdot C_1 \sin(\sqrt{\lambda}l) \cdot \lambda \cdot c^2$$

$$E \cdot A \cdot \cos(\sqrt{\lambda}l) = m \cdot \sin(\sqrt{\lambda}l) \cdot \sqrt{\lambda} \cdot c^2$$

$$\frac{E \cdot A}{m \cdot c^2} = \frac{A \cdot \rho}{m} = \sqrt{\lambda} \cdot \tan(\sqrt{\lambda}l)$$

Si llamamos 'B' a la masa de la barra y 'α' al argumento de la tangente:

$$l \cdot A \cdot \rho = B$$

$$\sqrt{\lambda} \cdot l = \alpha$$

$$\frac{B}{m} = \alpha \cdot \tan(\alpha)$$

De donde se pueden resolver numéricamente los valores de 'α' para obtener los valores de las frecuencias naturales de oscilación del sistema.

Vibraciones axiales forzadas

Como debido a la acción de una masa excéntrica girando a una cierta velocidad angular se genera una fuerza pulsante de la misma pulsación (la frecuencia de giro) se da el caso de vibraciones axiales forzadas. Es necesario que las frecuencias tales no sean coincidentes con las frecuencias naturales para evitar que la estructura entre en resonancia.

La ecuación diferencial a resolver es la misma pero se cambian las condiciones de borde, donde esta vez la tensión será una cierta función del tiempo.

$$y(0, t) = 0$$

$$\sigma(l, t) = \frac{F \cdot \sin(\omega t)}{A} \Rightarrow y_x(l, t) = \frac{F \cdot \sin(\omega t)}{A \cdot E}$$

$$y_t(x, 0) = 0$$

$$y(x, 0) = \frac{\Delta l}{l} x$$

Nuevamente podemos expresar la función 'y' como el producto de dos funciones de una variable para separarlas.

$$y = X(x) \cdot T(t)$$

$$T'' \cdot X = c^2 \cdot X'' \cdot T$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\lambda$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T'' + \lambda c^2 T = 0 \end{cases}$$

Cuyas soluciones son conocidas pues es el mismo sistema con otras condiciones de borde.

$$y(0, t) = X_{(0)} T_{(t)} = 0 \Rightarrow X_{(0)} = 0$$

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

$$X(0) = C_2 = 0$$

$$T(t) = C_3 \sin(\sqrt{\lambda}ct) + C_4 \cos(\sqrt{\lambda}ct)$$

$$y(x, t) = \sin(\sqrt{\lambda}x) [C_3 \sin(\sqrt{\lambda}ct) + C_4 \cos(\sqrt{\lambda}ct)]$$

$$y_x(x, t) = \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x) [C_3 \sin(\sqrt{\lambda}ct) + C_4 \cos(\sqrt{\lambda}ct)]$$

$$y_x(l, t) = \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}l) [C_3 \sin(\sqrt{\lambda}ct) + C_4 \cos(\sqrt{\lambda}ct)] = \frac{F \cdot \sin(\omega t)}{A \cdot E} \Rightarrow C_4 = 0$$

$$\sin(\omega t) = \sin(\sqrt{\lambda}ct) \Rightarrow \sqrt{\lambda}c = \omega$$

$$\frac{F}{A \cdot E} = C_3 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}l) \Rightarrow C_3 = \frac{F}{A \cdot E \cdot \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}l)}$$

$$\Rightarrow y(x, t) = \frac{F}{A \cdot E \cdot \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}l)} \sin(\sqrt{\lambda}x) \cdot \sin(\sqrt{\lambda}ct)$$

$$y_x(l, t) = \frac{F\sqrt{\lambda}}{A \cdot E \cdot \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}l)} \cos(\sqrt{\lambda}x) \cdot \sin(\sqrt{\lambda}ct) = \frac{F}{A \cdot E \cdot \cos(\sqrt{\lambda}l)} \cos(\sqrt{\lambda}x) \cdot \sin(\sqrt{\lambda}ct)$$

De ésta forma podemos determinar la tensión dinámica del punto más solicitado que será el de la base de la columna.

$$y_x(x, t) = \frac{F}{A \cdot E \cdot \cos(\sqrt{\lambda}l)} \cos(\sqrt{\lambda}x) \cdot \sin(\omega t)$$

$$\sigma = E \cdot y_x(0, t) = \frac{F}{A \cdot \cos(\sqrt{\lambda}l)} \cdot \sin(\omega t)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_{\text{est}}}{\cos(\sqrt{\lambda}l)}$$

La fuerza F debe considerar la masa total de la hélice más el generador y toda la maquinaria. De forma que una vez calculadas las vibraciones naturales de la columna con la masa total en el extremo libre, es necesario que la frecuencia de giro del rotor esté suficientemente alejada (más de un 10%) de la frecuencia de resonancia del sistema.

Vibraciones de flexión (frecuencias naturales)

Se calcularán las vibraciones de flexión tanto en las palas como en la columna para elegir una velocidad de rotación suficientemente alejada de las frecuencias naturales de oscilación. En ambos casos se tomará el momento de inercia de la sección como constante, en los casos en que no lo sea (como sucede en las palas) se tomará el momento de inercia de la sección media como constante.

Considérese una carga distribuida sobre una viga empotrada en un extremo donde la ecuación estática es la ya deducida anteriormente. Con un razonamiento similar al de las vibraciones axiales, desarrollando la segunda ley de Newton se tiene:

$$E \cdot J \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q(x, t) - A \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Donde en este caso la densidad es por unidad de longitud. La carga aquí puesta como una función de la posición y del tiempo es en realidad una carga que fuerza vibraciones. Como nuestro caso de estudio es de vibraciones no forzadas esta carga será nula de forma que nos queda una ecuación más simple:

$$\frac{E \cdot J}{A \cdot \rho} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$a^2 = \frac{E \cdot J}{A \cdot \rho}$$

$$a^2 y_{xxxx} = -y_{tt}$$

En el caso de una viga empotrada las condiciones de borde son las siguientes:

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y_x(0, t) = 0 \\ y_{xx}(l, t) = 0 \\ y_{xxx}(l, t) = 0 \\ y(x, 0) = f(x) \\ y_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Las primeras cuatro condiciones corresponden al estado de cargas y de vínculo. Las ultimas dos condiciones se explicitan pero no influyen en el cálculo de las frecuencias naturales de oscilación.

$$y = X(x) \cdot T(t)$$

$$a^2 \cdot T \cdot X'''' = -X \cdot T''$$

$$a^2 \frac{X''''}{X} = - \frac{T''}{T} = \lambda = \omega^2$$

$$\begin{cases} X'''' - \frac{\omega^2}{a^2} X = 0 \\ T'' + \omega^2 T = 0 \end{cases}$$

Analizando las condiciones de borde del problema:

$$y(0, t) = X_{(0)} T_{(t)} = 0 \Rightarrow X_{(0)} = 0$$

$$y_x(0, t) = X'_{(0)} T_{(t)} = 0 \Rightarrow X'_{(0)} = 0$$

$$y_{xx}(l, t) = X''_{(l)} T_{(t)} = 0 \Rightarrow X''_{(l)} = 0$$

$$y_{xxx}(l, t) = X'''_{(l)} T_{(t)} = 0 \Rightarrow X'''_{(l)} = 0$$

Se propone una solución exponencial que desarrollada queda:

$$T_{(t)} = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$T'_{(t)} = -\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t)$$

$$T'_{(0)} = \omega B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$T_{(t)} = A \sin(\omega t)$$

$$X = e^{rx}$$

$$X'''' = r^4 e^{rx}$$

$$r^4 e^{rx} - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 e^{rx} = 0$$

$$r^4 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 = 0 \Rightarrow r = \sqrt[4]{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2} = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{\omega}{a}\right)} \\ -\sqrt{\left(\frac{\omega}{a}\right)} \\ \sqrt{\left(\frac{\omega}{a}\right)} \cdot i \\ -\sqrt{\left(\frac{\omega}{a}\right)} \cdot i \end{cases}$$

$$X = C \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot x\right) + D \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot x\right) + E \cosh\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot x\right) + F \sinh\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot x\right)$$

$$X_{(0)} = C + E = 0 \Rightarrow C = -E$$

$$X' = \sqrt{\frac{\omega}{a}} \left[E \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot x\right) + D \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot x\right) + E \sinh\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot x\right) + F \cosh\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot x\right) \right]$$

$$X'_{(0)} = \sqrt{\frac{\omega}{a}} [D + F] = 0 \Rightarrow D = -F$$

$$X'' = \frac{\omega}{a} \left[E \left[\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot x\right) + \cosh\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot x\right) \right] + F \left[\sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot x\right) + \sinh\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot x\right) \right] \right]$$

$$X''_{(1)} = \frac{\omega}{a} \left[E \left[\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot 1\right) + \cosh\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot 1\right) \right] + F \left[\sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot 1\right) + \sinh\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot 1\right) \right] \right] = 0$$

$$X''' = \left(\frac{\omega}{a}\right)^{3/2} \left[E \left[\sinh\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot x\right) - \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot x\right) \right] + F \left[\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot x\right) + \cosh\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot x\right) \right] \right]$$

$$X'''_{(1)} = \left(\frac{\omega}{a}\right)^{3/2} \left[E \left[\sinh\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot 1\right) - \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot 1\right) \right] + F \left[\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot 1\right) + \cosh\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot 1\right) \right] \right] = 0$$

De donde se puede armar el siguiente sistema para 'E' y 'F', cuyo determinante debe ser cero:

$$\begin{cases} E \left[\cos \left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot 1 \right) + \cosh \left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot 1 \right) \right] + F \left[\sin \left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot 1 \right) + \sinh \left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot 1 \right) \right] = 0 \\ E \left[\sinh \left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot 1 \right) - \sin \left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot 1 \right) \right] + F \left[\cos \left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot 1 \right) + \cosh \left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot 1 \right) \right] = 0 \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot 1 = u$$

$$\begin{vmatrix} \cos(u) + \cosh(u) & \sin(u) + \sinh(u) \\ \sinh(u) - \sin(u) & \cos(u) + \cosh(u) \end{vmatrix} = [\cos(u) + \cosh(u)]^2 - [\sin^2(u) + \sinh^2(u)] = 0$$

$$\cosh^2(u) + 2 \cosh(u) \cos(u) + \cos^2(u) - \sinh^2(u) + \sin^2(u) = 0$$

$$\cosh(u) \cos(u) = -1$$

De donde, despejando para 'u' se pueden sacar las frecuencias naturales de oscilación ' ω '. La velocidad de rotación debe estar suficientemente alejada de esa frecuencia (preferentemente por debajo de la primera armónica) para evitar la resonancia y posterior rotura de las palas o la columna.

Es posible determinar la solución completa para 'y' despejando 'E' en función de 'F' y reemplazándola en la ecuación de 'y', lo que daría una forma de serie de Fourier. Conocida la función inicial de la posición de la viga, es posible determinar los coeficientes de la serie, sin embargo no es el propósito de éste estudio la función en sí, sino solamente las frecuencias de resonancia de la viga.

Análisis práctico del problema aerodinámico

En esta sección se aborda el tema de la deducción y fijación de parámetros de diseño del perfil de cada pala de la turbina eólica. El objetivo de éste trabajo es dimensionar una turbina eólica que genere 3 Mw de potencia eléctrica considerando el rendimiento de Betz y el rendimiento de la maquinaria involucrada. En una sección posterior se analizará el problema estructural considerando no solo el análisis estático sino también el problema de vibraciones naturales de la estructura.

Para determinar las condiciones de funcionamiento y determinar las dimensiones principales de la turbina se elegirá una ubicación. En éste caso la ubicación se eligió en la zona oeste de la ciudad de Comodoro Rivadavia, donde los vientos son los más fuertes de la Argentina, con promedios anuales de 11,2 m/s.

Potencia mecánica requerida por el rotor y radio de barrido de palas

Considerando la potencia eléctrica nominal (P_e), el rendimiento de la maquinaria del generador y el rendimiento de Betz es posible calcular la potencia mecánica que debe generar el rotor así como el área de barrido de las paletas y por tanto, su longitud. Del teorema de Betz tenemos:

$$\eta_{\text{Betz}} = \frac{P_u}{P_v} = 0,592$$

$$P_v = \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot V_1^3$$

$$A = \frac{2 \cdot P_v}{\rho \cdot V_1^3} = \frac{2 \cdot P_u}{\rho \cdot V_1^3 \cdot \eta_{\text{Betz}}}$$

$$P_e = P_u \cdot \eta_{\text{maq}}$$

$$A = \frac{2 \cdot P_e}{\rho \cdot V_1^3 \cdot \eta_{\text{Betz}} \cdot \eta_{\text{maq}}}$$

$$R_{\text{nec}} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{2 \cdot P_e}{\pi \cdot \rho \cdot V_1^3 \cdot \eta_{\text{Betz}} \cdot \eta_{\text{maq}}}}$$

Considerando el rendimiento de la maquinaria cercano al 0.85

$$P_e = 3\text{Mw} = 3 \cdot 10^6 \text{ w}$$

$$\rho = 1.2 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$$V_1 = 11.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\eta_{\text{Betz}} = 0.592$$

$$\eta_{\text{maq}} = 0.85$$

$$R_{\text{nec}} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{2 \cdot P_e}{\pi \cdot \rho \cdot V_1^3 \cdot \eta_{\text{Betz}} \cdot \eta_{\text{maq}}}} = 47.2257 \text{ m}$$

De éste cálculo adoptamos un radio de pala de 48m por simplicidad en los cálculos, tambien es necesario adoptar un radio mínimo correspondiente a una porción inactiva de la pala, para éste caso se adoptó 5m para evitar todo tipo de interferencia entre las palas. De todas formas las fluctuaciones del viento hacen que la potencia entregada no sea constante. La forma de controlar este aspecto es con el ángulo de ataque de las palas respecto al viento variable en función de la velocidad del mismo.

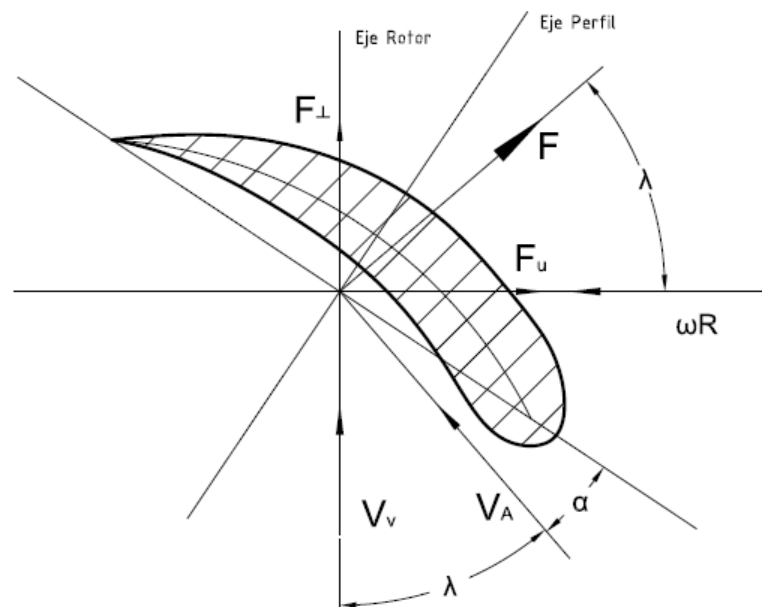
Se buscó en turbinas parecidas las características usuales de las palas para definir las dimensiones. Adoptado un generador sincrónico, de manera que la velocidad de giro del rotor se mantiene constante, es necesario reducir la velocidad de rotación utilizando una caja reductora de engranajes, un freno mecánico que se activa en condiciones adversas (si es necesario parar la turbina por vientos demasiado fuertes,

mantenimiento etc.) y un regulador del ángulo de ataque de las palas para regular la potencia. La velocidad del rotor se fija en 15 rpm, lo que hace necesaria una caja de engranajes que multiplique esa velocidad por 100 para un generador de 4 polos magnéticos.

Para el ancho de palas se propondrá un perfil lineal con el radio (el parámetro 'a' será lineal, lo que aproximadamente controla el ancho del perfil). La relación 'd/a' se mantendrá constante a lo largo de toda la pala y se toma entre 0.1 y 0.2 para no hacer que el espesor del perfil sea excesivo (lo que aumenta la fuerza de 'drag' que resulta contraproducente) y tampoco muy pequeño que comprometa la rigidez estructural de las palas. De la investigación realizada se adoptó una pala de ancho 3m en el radio mínimo y de 1m en el radio máximo ($a_{\max} = 0.75$ y $a_{\min} = 0.25$ respectivamente a los radios $R_{\min} = 5m$ y $R_{\max} = 48m$).

Curvatura de las palas

Para analizar la curvatura de las palas es necesario tener en cuenta que la velocidad aparente del viento sobre la pala es la composición vectorial de la velocidad de rotación de la pala y del viento incidente sobre ésta, de manera que la velocidad aparente será variable sobre el perfil y es necesario que la pala tenga un ángulo de posición respecto del eje del rotor variable con el radio. Para eso definimos el ángulo ' λ ' como el ángulo formado por la velocidad aparente y el eje del rotor. Se adoptará el ángulo ' β ' (curvatura del esqueleto del perfil) y ' α ' (ángulo de ataque del perfil) como constantes para el diseño.



$$V_{\text{rot}} = \omega \cdot R$$

$$V_v = 11.2 \frac{m}{s} = \text{cte.}$$

$$V_a = \sqrt{(\omega \cdot R)^2 + V_v^2}$$

De manera que el ángulo de rotación de cada perfil (definido como el ángulo que formará el eje del perfil con el eje del rotor) en función del radio estará dado por ' λ ' (función del radio) y ' α ' (tomado constante en cada sección).

$$\mu_{(R)} = \lambda_{(R)} + \alpha = a \tan\left(\frac{\omega \cdot R}{V_v}\right) + \alpha$$

Esto hace que la fuerza sea variable también con el radio a medida que se aleja del eje del rotor.

Momento generado por las palas

La fuerza útil en la generación de potencia es la componente perpendicular al eje del rotor, como la fuerza resultante es perpendicular a la dirección del viento aparente se tiene:

$$\lambda_{(R)} = a \tan\left(\frac{\omega \cdot R}{V_v}\right)$$

$$F_u = F \cdot \cos(\lambda_{(R)}) = F \cdot \frac{V_v}{V_a}$$

$$F_{per} = F \cdot \sin(\lambda_{(R)}) = F \cdot \frac{\omega \cdot R}{V_a}$$

Nótese que la dirección de la fuerza está determinada solamente por el ángulo que forman la velocidad aparente del viento y el eje de la turbina. De la parte teórica tenemos una expresión para la fuerza por unidad de longitud de perfil, de la que integrando en 'R' la fuerza útil es posible determinar el momento útil que genera cada pala, multiplicado por la cantidad de palas (en nuestro caso 3) se obtiene el momento total que genera el rotor:

$$F = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot a \cdot \left(\frac{d}{a} + \sqrt{1 + \tan^2 \beta}\right) \cdot V_a^2 \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$\frac{d}{a} = K = 0.15$$

$$a = b \cdot R + c \quad \begin{cases} b = \frac{a_{\min} - a_{\max}}{R_{\max} - R_{\min}} \\ c = a_{\max} - b \cdot R_{\min} \end{cases}$$

$$F_u = F \cdot \frac{V_v}{V_a} = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot (b \cdot R + c) \cdot \left(\frac{d}{a} + \sqrt{1 + \tan^2 \beta}\right) \cdot V_a \cdot V_v \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$M_u = 3 \cdot \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} F_u \cdot R \cdot dR = 3 \cdot \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot (b \cdot R + c) \cdot \left(\frac{d}{a} + \sqrt{1 + \tan^2 \beta}\right) \cdot V_a \cdot V_v \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot R \cdot dR$$

$$M_u = 12 \cdot \pi \cdot \rho \cdot a \cdot \left(\frac{d}{a} + \sqrt{1 + \tan^2 \beta}\right) \cdot V_v \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot [I_{(R_{\max})} - I_{(R_{\min})}]$$

Donde:

$$I_{(R)} = \int (b \cdot R + c) \sqrt{(\omega \cdot R)^2 + V_v^2} \cdot R \cdot dR =$$

$$= \int \omega \cdot b \cdot R^2 \cdot \sqrt{(R)^2 + \left(\frac{V_v}{\omega}\right)^2} dR + \int \omega \cdot c \cdot R \cdot \sqrt{(R)^2 + \left(\frac{V_v}{\omega}\right)^2} dR$$

$$\delta = \frac{V_v}{\omega}$$

$$I_{(R)} = \frac{\omega b}{4} \left[R(R^2 + \delta^2)^{3/2} + \frac{\delta^2 R}{2} (R^2 + \delta^2)^{1/2} - \frac{\delta^2}{2} \ln \left(R + (R^2 + \delta^2)^{1/2} \right) \right] + \frac{\omega c}{3} (R^2 + \delta^2)^{3/2}$$

Con ésta expresión se puede calcular la potencia mecánica generada por el rotor, que teniendo en cuenta el rendimiento de la maquinaria (estimada en 0.85) daría la potencia eléctrica generada. Se utilizó una función programada en Matlab que se adjunta en el Apéndice.

Para los parámetros fijados, la potencia eléctrica será:

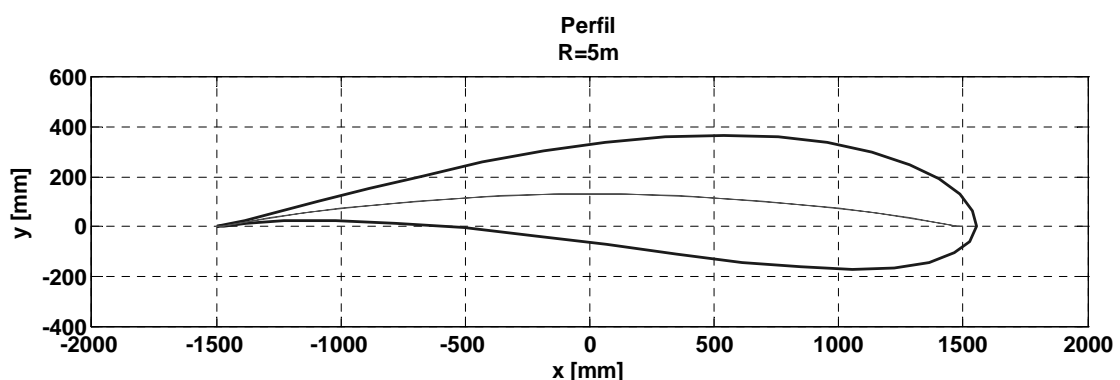
$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 5^\circ = \text{cte.} \\ \beta = 5^\circ = \text{cte.} \\ R_{\max} = 48\text{m} \\ R_{\min} = 5\text{m} \\ a_{\max} = 0.75\text{m} \\ a_{\min} = 0.25\text{m} \\ V_v = 11.2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \omega = 15\text{rpm} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\text{s}} \\ K = 0.15 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} M_u = 2.3662 \cdot 10^6 \text{ Nm} = 2.3662 \text{ MNm} \\ P_u = M_u \cdot \omega = 3.7167 \text{ Mw} \\ P_e = P_u \cdot \eta_{\text{maq}} = 3.1592 \text{ Mw} \end{cases}$$

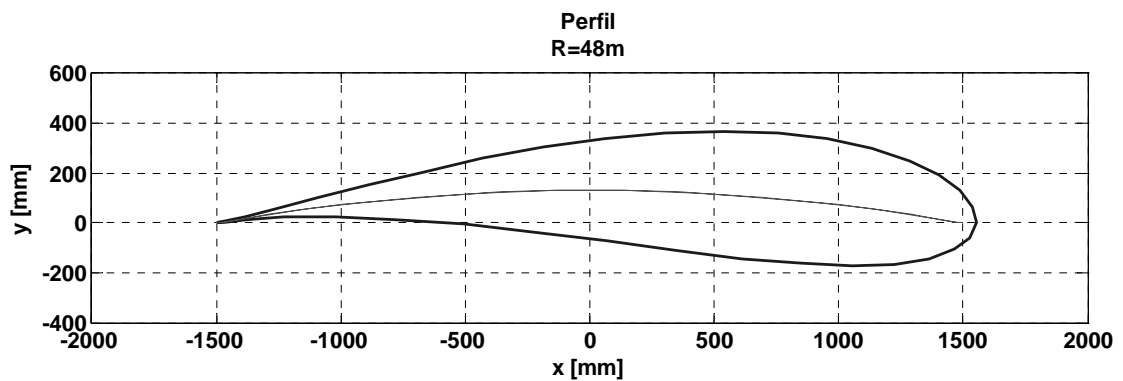
Valor de P_e superior al buscado. Nótese que el efecto del ángulo ' α ' es predominante sobre la potencia eléctrica. En efecto si se cambia el ángulo a 4° la potencia eléctrica cae a 2.8461 Mw. De manera que equipar a la turbina con un sistema que pueda girar las palas para aumentar o disminuir el ángulo de ataque en función del viento resulta muy ventajoso; además es una de las formas más efectivas de controlar la potencia eléctrica entregada por el generador, actuando sobre la fuerza que generan las palas sin variar la velocidad del rotor.

Modelo constructivo de una pala

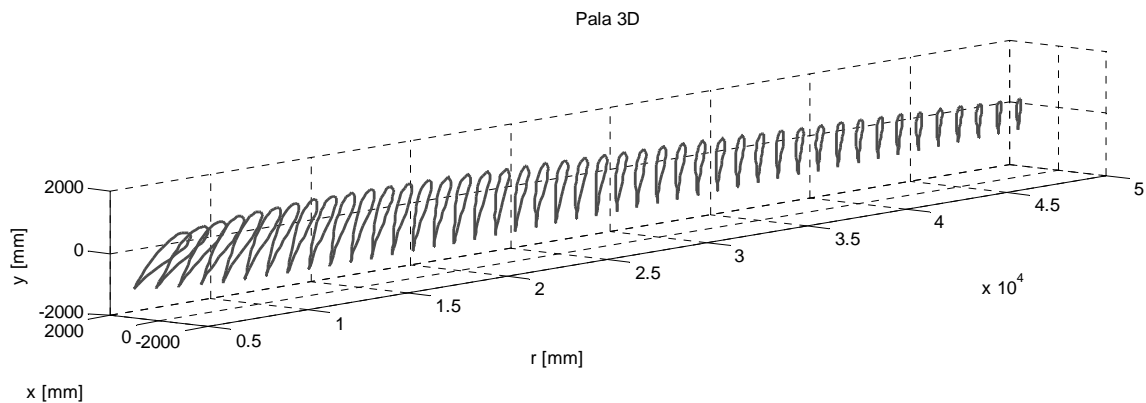
Una vez fijados los valores de los parámetros del perfil, es necesario llevar a cabo el modelo de una pala. Para ello se efectuó un programa que dibuje el perfil (adjunto en el Apéndice), posteriormente se le agregó un módulo para que dibuje perfiles en función de la distancia al rotor y le de a cada sección de la pala la rotación de acuerdo al viento aparente (manteniendo el ángulo ' α ') constante en todas las secciones. Luego de obtener varios perfiles se pasaron los resultados a un programa de CAD para obtener un modelo en 3d de una pala.

Usando la transformación de Kutta-Joukovsky con los parámetros fijados se llegó a cada perfil, aquí se muestran el perfil generado para el radio mínimo y el radio máximo sin su rotación correspondiente por claridad.





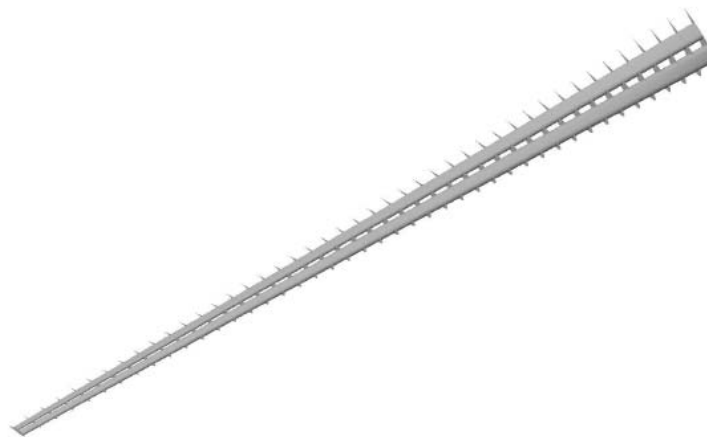
Con el mismo programa se generó una vista preliminar de las distintas secciones (separadas cada 1m) con su respectiva rotación. En el Apéndice se adjunta además el modelo 3d del esqueleto de la pala propuesto para resolver el problema estructural.



Análisis práctico del problema estructural

El problema estructural se reduce a un análisis estático de las palas y la columna y el análisis dinámico en los distintos modos de sollicitación de los mismos elementos.

Para reducir el peso de la pala se optó por no fabricarla maciza sino tomando a intervalos regulares chapas con el perfil diseñado uniéndolos con dos almas longitudinales. (Se adjunta un modelo en CAD y los datos extraídos del mismo en las distintas secciones en el Apéndice)



Diseño de pala

Análisis estático de la pala

Con la expresión que se tiene de la fuerza total, es posible calcular el momento flector integrando dos veces la fuerza distribuida en función del radio.

$$F = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot (bR + c) \cdot \left(K + \sqrt{1 + \tan^2 \beta} \right) \cdot V_a^2 \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$Q(R) = \int F dR = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \left(K + \sqrt{1 + \tan^2 \beta} \right) \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \int (bR + c) ((\omega R)^2 + V_v^2) dR$$

$$Q(R) = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \left(K + \sqrt{1 + \tan^2 \beta} \right) \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot [I_1(R) + C_1]$$

$$I_1(R) = \int (bR^3 \omega^2 + bV_v^2 R + cR^2 \omega^2 + cV_v^2) \cdot dR =$$

$$I_1(R) = \frac{b\omega^2}{4} R^4 + \frac{bV_v^2}{2} R^2 + \frac{c\omega^2}{3} R^3 + cV_v^2 R$$

$$M(R) = \int Q(R) dR = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \left(K + \sqrt{1 + \tan^2 \beta} \right) \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \int [I_1(R) + C_1] dR$$

$$M(R) = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \left(K + \sqrt{1 + \tan^2 \beta} \right) \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot [I_2(R) + C_2]$$

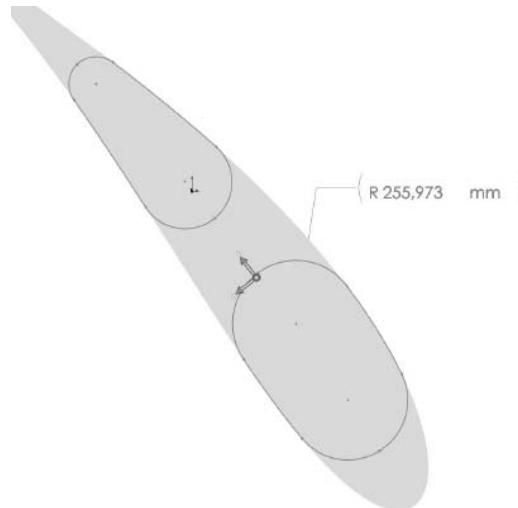
$$I_2(R) = \int [I_1(R) + C_1] dR = \frac{b\omega^2}{20} R^5 + \frac{bV_v^2}{6} R^3 + \frac{c\omega^2}{12} R^4 + \frac{cV_v^2}{2} R^2 + C_1 R$$

Con las condiciones de cargas en el extremo nulas:

$$Q(R_{\max}) = 0 \Rightarrow [I_1(R_{\max}) + C_1] = 0 \Rightarrow C_1 = -I_1(R_{\max})$$

$$M(R_{\max}) = 0 \Rightarrow [I_2(R_{\max}) + C_2] = 0 \Rightarrow C_2 = -I_2(R_{\max})$$

La sección correspondiente al radio mínimo (la más solicitada) debe ser verificada a flexión, siendo el momento de inercia el sacado del programa de CAD y el módulo de Young correspondiente al acero. Se puede entonces calcular la tensión máxima en esa sección. Se considerará el peor de los casos que corresponde al mínimo momento de inercia de la sección, dado que el momento a lo sumo se encontrará actuando en ese plano.



Vista de sección R=5m

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{(R_{\min})}}{J} y_{\max}$$

$$J = I_x = 0.00910887 \text{ m}^4$$

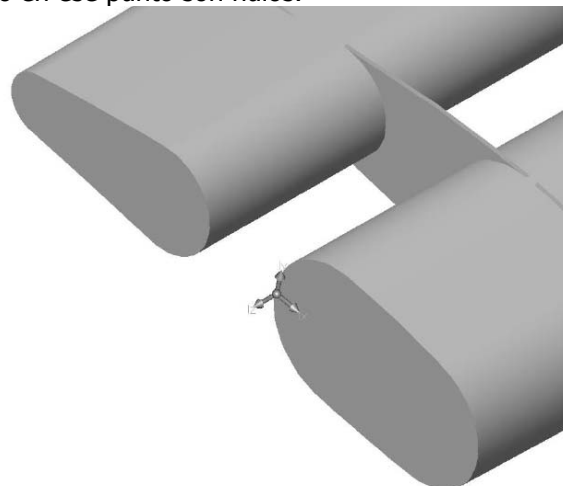
$$y_{\max} = 0.225973 \text{ m}$$

$$M_{(R_{\min})} = 2.8397 \cdot 10^6 \text{ Nm} = 2.8397 \text{ MNm}$$

$$\sigma_{\max} = 70.44733 \text{ MPa}$$

Curva elástica de la pala

Considerando el Momento de inercia de la sección a lo largo de la pala como constante e igual a un momento de inercia medio (el valor es tomado de la sección media de la pala, cuyas características se adjuntan en el Apéndice) es posible determinar la curva elástica de la pala. Nuevamente tomamos el peor de los casos en el que el momento flector actúa sobre el plano correspondiente al momento de inercia mínimo. Las condiciones de borde tomadas son las correspondientes a la viga empotrada en un extremo, donde la tangente y el desplazamiento en ese punto son nulos.



Vista sección media

$$\frac{d^2y}{dR^2} = \frac{M(R)}{E \cdot J}$$

$$P = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \left(K + \sqrt{1 + \tan^2 \beta} \right) \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$\Phi(R) = \frac{dy}{dR} = \frac{P}{E \cdot J} \int I_2(R) dR = \frac{P}{E \cdot J} [I_3(R) + C_3]$$

$$\Phi(R_{\min}) = 0 \Rightarrow I_3(R_{\min}) = -C_3$$

$$I_3(R) = \frac{b\omega^2}{120} R^6 + \frac{bV_v^2}{24} R^4 + \frac{c\omega^2}{60} R^5 + \frac{cV_v^2}{6} R^3 + \frac{C_1}{2} R^2 + C_2 R$$

$$y(R) = \int \Phi(R) dR = \frac{P}{E \cdot J} \int I_3(R) dR = \frac{P}{E \cdot J} [I_4(R) + C_4]$$

$$y(R_{\min}) = 0 \Rightarrow I_4(R_{\min}) = -C_4$$

$$I_4(R) = \frac{b\omega^2}{840} R^7 + \frac{bV_v^2}{120} R^5 + \frac{c\omega^2}{360} R^6 + \frac{cV_v^2}{24} R^4 + \frac{C_1}{6} R^3 + \frac{C_2}{2} R^2 + C_3 R$$

La deflexión máxima se dará en el extremo de la pala libre (R_{\max}) Para el momento de inercia de la sección media y el módulo de Young del acero 1020 (200 GPa) la deflexión será:

$$E = 200 \text{ GPa} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

$$J_{\text{medio}} = 0.00180018$$

$$y(R_{\max}) = \frac{P}{E \cdot J} [I_4(R_{\max}) + C_4] = 3.539 \text{ m}$$

Que teniendo en cuenta que es la deflexión tomada para el peor de los casos puede considerarse la deflexión máxima que tendrá la pala en condiciones normales de funcionamiento.

Análisis estático de la columna

Tensiones de flexión debido al empuje de las palas

Se tomará una columna de sección anular, teniendo en cuenta que para ascender a la cima de la torre por dentro de la columna debe correr una escalera o ascensor. Su altura debe ser al menos del radio de la pala más una distancia de seguridad. La mayoría de las turbinas consultadas tienen la columna del mismo tamaño que el diámetro de barrido, como la turbina del presente trabajo es de dimensiones mucho mayores, se toma en primera aproximación el alto de la columna como una vez y media del radio máximo de las palas. La altura de la columna deberá ser tal que el viento incidente en el tubo que debe desplazar la turbina sea mas o menos constante en su área.

En éste caso se tomará como fuerza predominante la de las palas debido a que es mucho mayor a las demás. Para eso se debe integrar la fuerza distribuida sobre las mismas. La integral definida de la fuerza entre R_{\min} y R_{\max} coincide con la función del esfuerzo cortante evaluada entre esos mismos puntos de manera que la fuerza total en las palas será tres veces ese valor.

$$F = 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot (bR + c) \cdot \left(K + \sqrt{1 + \tan^2 \beta} \right) \cdot V_a^2 \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$F_{\text{total}} = 3 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \left(K + \sqrt{1 + \tan^2 \beta} \right) \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} (bR + c) \left((\omega R)^2 + V_v^2 \right) dR$$

$$F_{\text{total}} = 12 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \left(K + \sqrt{1 + \tan^2 \beta} \right) \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot [I_1(R_{\max}) - I_1(R_{\min})]$$

$$I_1(R) = \int (bR^3 \omega^2 + bV_v^2 R + cR^2 \omega^2 + cV_v^2) \cdot dR =$$

$$I_1(R) = \frac{b\omega^2}{4} R^4 + \frac{bV_v^2}{2} R^2 + \frac{c\omega^2}{3} R^3 + cV_v^2 R$$

$$F_{\text{total}} = 3.4488 \cdot 10^5 = 344.88 \text{ KN}$$

En éste caso la fuerza se tomará como concentrada en un extremo. De forma que puede calcularse fácilmente el momento flector en la base (la sección más solicitada) y calcular la tensión máxima.

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{J} y_{\max}$$

$$J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64} D^4 \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right) = \frac{\pi}{64} D^4 (1 - \delta^4)$$

$$\delta = \frac{d}{D}$$

$$y_{\max} = \frac{D}{2}$$

$$M = F_{\text{total}} \cdot L$$

$$\sigma_{\max} = \frac{32 \cdot F_{\text{total}} \cdot L}{\pi D^3 (1 - \delta^4)}$$

Tensiones axiales debido al peso de la torre

Además de las tensiones de flexión deben tomarse en cuenta las tensiones axiales debido al peso de la maquinaria y las palas. El peso de cada pala es sacado del programa de CAD. Dado que el peso predominante es el de las palas, se toma sin mayor error el triple del peso de una pala (aproximadamente 300 toneladas).

Las tensiones axiales serán entonces:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} D^2 \left(1 - \frac{d^2}{D^2} \right) = \frac{\pi}{4} D^2 (1 - \delta^2)$$

$$\delta = \frac{d}{D}$$

$$P = 3 \cdot 102451.36 \text{ Kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3.0151 \cdot 10^6 \text{ N} = 3.0151 \text{ MN}$$

$$\sigma = \frac{4 \cdot P}{\pi D^2 (1 - \delta^2)}$$

Dimensionamiento de la sección de la columna

Las tensiones totales serán la suma de ambas tensiones.

$$\sigma_{\text{flexion}} + \sigma_{\text{axial}} = \frac{32 \cdot F_{\text{total}} \cdot L}{\pi D^3 (1 - \delta^4)} + \frac{4 \cdot P}{\pi D^2 (1 - \delta^2)} = \frac{32 \cdot F_{\text{total}} \cdot L + 4 \cdot P \cdot D \cdot (1 + \delta^2)}{\pi D^3 (1 - \delta^4)}$$

Tomando la relación ' δ ' y fijado el límite de tensión conociendo el límite de fluencia del material afectado por un coeficiente de seguridad es posible determinar el diámetro exterior.

En nuestro caso se adoptará un diámetro interior a fin de asegurar el problema de la accesibilidad a la torre desde el interior y con ese diámetro se fijará el exterior. Adoptaremos un diámetro interior de 3 metros y un diámetro exterior de 3.3 metros y se verificará la tensión resultante comparándola con la tensión límite elástica del acero 1020.

$$D = 3.3\text{m}$$

$$d = 3\text{m}$$

$$\delta = \frac{3\text{m}}{3.3\text{m}} \cong 0.9091$$

$$\sigma_{\text{fl}} = 351.571 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \frac{32 \cdot F_{\text{total}} \cdot L}{\pi D^3 (1 - \delta^4)} + \frac{4 \cdot P}{\pi D^2 (1 - \delta^2)} = 2.4237 \cdot 10^7 = 24.237 \text{ MPa} < \sigma_{\text{fl}}$$

Análisis dinámico de la pala

Frecuencias naturales de vibración en flexión de la pala

Es conocida la ecuación que debe resolverse para obtener las frecuencias de vibración natural de la viga en flexión. En el caso de las palas se las modeliza como una viga empotrada en un extremo, considerando un momento de inercia de la sección constante e igual al momento de inercia de la sección media.

$$\cos(u) \cdot \cosh(u) + 1 = 0 \Rightarrow \cos(u) = \frac{-1}{\cosh(u)}$$

$$u = \sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot l$$

$$a = \sqrt{\frac{E \cdot J}{\rho \cdot A}}$$

Considerando 'a' como constante, se puede resolver la ecuación numéricamente para 'u' para después hallar los valores de ' ω '. Para tener alguna idea de los valores de 'u' para los que se cumple la ecuación, se graficarán ambos miembros en un mismo gráfico.

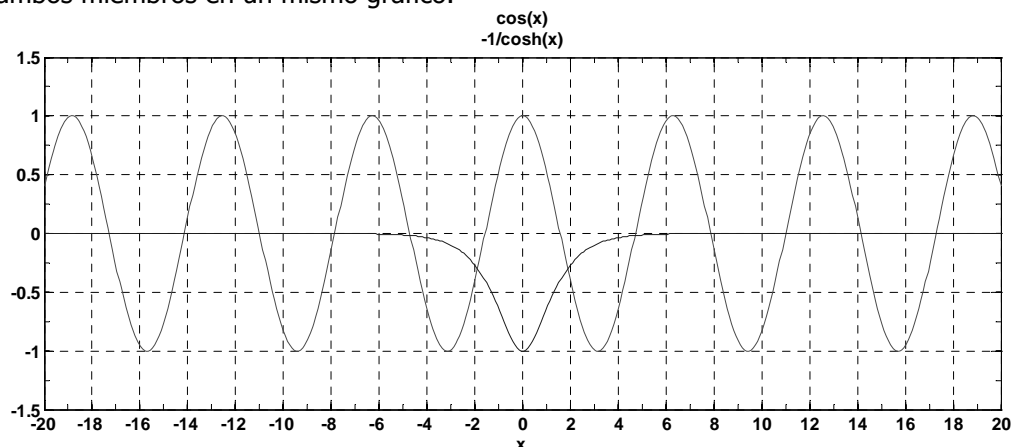


Gráfico $\cos(x) = -1/\cosh(x)$

De lo que podemos ver que las curvas se cruzan entre 1 y 2, entre 4 y 5 y luego tienden a los ceros del coseno trigonométrico. Resolviendo las primeras frecuencias de forma numérica se obtuvo:

$$u_1 = 1.8751$$

$$u_2 = 4.6941$$

$$u_3 = 7.8548$$

Lo que resulta en las siguientes frecuencias respectivas:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot l \\ a &= \sqrt{\frac{E \cdot J}{\rho \cdot A}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{E \cdot J}{\rho \cdot A}} \cdot \left(\frac{u}{l}\right)^2$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$A = A_{\text{media}} = 0.276803 \text{ m}^2$$

$$J = J_{\text{medio}} = 0.00180018 \text{ m}^4$$

$$\rho = 7900 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$$l = 48 \text{ m}$$

$$\omega_1 = 0.6192 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = 3.8806 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\omega_3 = 10.8657 \frac{1}{\text{s}}$$

Siendo la velocidad de rotación de la turbina:

$$\omega_{\text{rot}} = 1.5708 \frac{1}{\text{s}}$$

La turbina diseñada funciona con una frecuencia de giro ' ω ' situada entre la primera y la segunda frecuencia de resonancia. Debido a que la primera frecuencia de resonancia es muy baja, es posible evitarla, al parar la turbina, frenándola lo suficientemente rápido como para que el paso por esa frecuencia no la lleve a falla.

Análisis dinámico de la columna

En la columna es necesario efectuar dos análisis de frecuencias naturales, el de vibraciones axiales y el de vibraciones de flexión, dado que ella debe soportar el peso de toda la estructura así como el empuje de la turbina que la llevará a flexionarse.

Frecuencias naturales de vibración axiales

En éste caso es necesario tomar las vibraciones axiales de una barra con una masa concentrada en el extremo, cuya ecuación es:

$$\frac{B}{m} = \alpha \cdot \tan(\alpha)$$

$$\alpha = \sqrt{\lambda} \cdot l$$

Dónde 'B' es la masa de la barra y 'm' es la masa concentrada, que tomaremos como el triple del peso de una pala (cerca de 300 toneladas) considerando el resto de las masas despreciables.

$$\rho = 7900 \text{ Kg/m}^3$$

$$l = 48\text{m} \cdot 1.5 = 72 \text{ m}$$

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 1.4844 \text{ m}^2$$

$$B = \rho \cdot l \cdot A = 846.60192 \text{ ton}$$

$$m = 3 \cdot 102.45136 \text{ ton} = 307.35408 \text{ ton}$$

$$\frac{B}{m} = \alpha \cdot \tan(\alpha)$$

$$\alpha = \sqrt{\lambda} \cdot l$$

$$\omega = \sqrt{\lambda} c = \frac{\alpha}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Nuevamente se graficarán ambos miembros de la ecuación para determinar los valores de ' α ' y luego los de las frecuencias naturales.

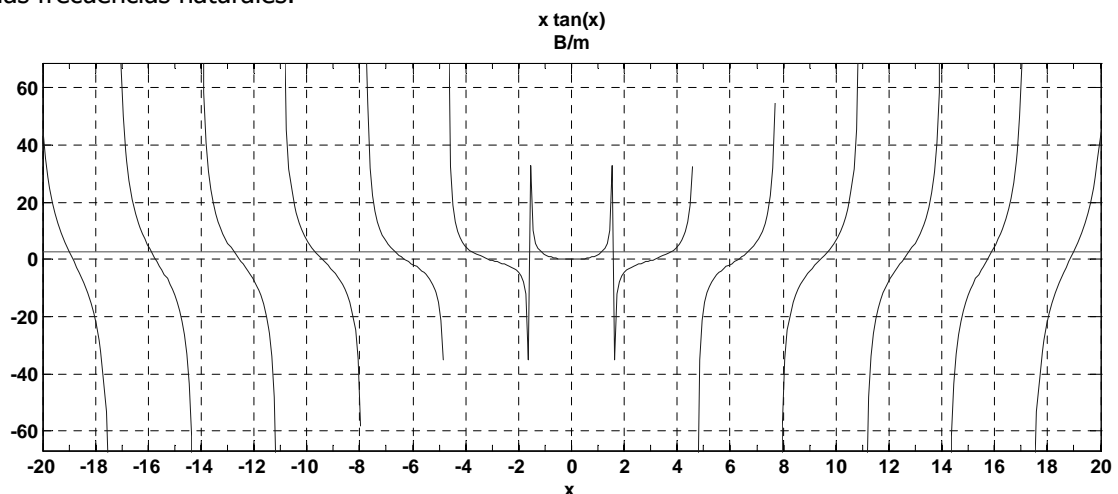


Gráfico $x \cdot \tan(x) = B/m$

Donde se pueden obtener numéricamente los valores de ' α '.

$$\alpha_1 = 1.1693$$

$$\alpha_2 = 1.5708$$

$$\alpha_3 = 3.7723$$

Y sus correspondientes valores de frecuencia.

$$\omega = \frac{\alpha}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\omega_1 = 81.7137 \text{ 1/s}$$

$$\omega_2 = 109.7715 \text{ 1/s}$$

$$\omega_3 = 263.6181 \text{ 1/s}$$

$$\omega_{\text{rot}} = 1.5708 \text{ 1/s}$$

Contrastados con la frecuencia de rotación del rotor se puede asegurar de estar suficientemente alejados de cualquier situación de resonancia.

Vibraciones de flexión

Nuevamente la ecuación a resolver es

$$\cos(u) \cdot \cosh(u) + 1 = 0 \Rightarrow \cos(u) = \frac{-1}{\cosh(u)}$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{\omega}{a}} \cdot l \\ a &= \sqrt{\frac{E \cdot J}{\rho \cdot A}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{E \cdot J}{\rho \cdot A}} \cdot \left(\frac{u}{l}\right)^2$$

Dado que el parámetro 'u' de la ecuación de frecuencias naturales de vibración en flexión es adimensional, es posible utilizar los mismos valores para determinar las frecuencias de resonancia sobre la columna en flexión. Cambian el parámetro 'a' y la longitud de la columna.

$$\left. \begin{aligned} E &= 200 \text{ GPa} \\ A &= \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 1.4844 \text{ m}^2 \\ J &= \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = 1.845298 \text{ m}^4 \\ \rho &= 7900 \text{ Kg/m}^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{E \cdot J}{\rho \cdot A}} = 5609.95316$$

$l = 72 \text{ m}$

$$u_1 = 1.8751$$

$$u_2 = 4.6941$$

$$u_3 = 7.8548$$

$$\omega_1 = 3.80490 \text{ 1/s}$$

$$\omega_2 = 23.84509 \text{ 1/s}$$

$$\omega_3 = 66.76740 \text{ 1/s}$$

Y la frecuencia del rotor

$$\omega_{\text{rot}} = 1.5708 \text{ 1/s}$$

Que se encuentra muy por debajo de la frecuencia de resonancia de la columna.

Apéndice:

- Programas
- Diseño de palas
- Características de secciones

```
function Graficoperfil(K,alfad,beta,Rmin,Rmax,amin,amax,wd,Vd)
```

```
% Función que dibuja varios perfiles para generar una vista preeliminar en  
% 3d de la pala
```

```
b=(amin-amax)/(Rmax-Rmin);  
c=amax-b*Rmin;
```

```
for R=Rmin:Rmax  
    a=b*R+c;  
    lambdad=atan(wd*R/Vd);  
    perfil(K,a,alfad,beta,lambdad,R);  
end  
perfil3d(Rmin,Rmax);
```

```
function perfil(K,a,alfad,beta,lambdad,R)

% Dibuja la curva del contorno del perfil
% aerodinámico según la transformación de Kutta-Jukovsky
% dadas las variables:
% K = Relacion de d/a para calcular las dimensiones del perfil
% a = Puntos de corte de la circunferencia del esqueleto del perfil
% alfad = angulo de ataque (solo usado para el giro del perfil)
% beta = angulo de arqueo del perfil
% lambdad = angulo de rotacion del perfil (usado para el giro del perfil y generar alas en 3d)
% R = posicion r (usado para generar alas en 3d)

%% Generacion de puntos para el perfil
d=a*K;
r=a/cos(beta);
m=r*sin(beta);
R0=r+d;
t=[(-pi+beta):2*pi/36:(pi+beta)]';
xa=r*cos(t); ya=r*sin(t);
za=xa+i*(ya+m);
wa=((za+a^2./za)-i*2*m)*exp(i*(-pi/2+lambdad+alfad));
xp=R0*cos(t); yp=R0*sin(t);
zper=xp+i*yp+d*cos(beta)+i*(m+d*sin(beta));
wp=((zper+a^2./zper)-i*2*m)*exp(i*(-pi/2+lambdad+alfad));

%% Salida de datos en texto para Solidworks
E=1000*[real(wp) imag(wp)];
E(:,3)=R*1000;
filename=['perfilR' num2str(R) '.txt'];
dlmwrite(filename,E,'delimiter','\t','precision',4,'newline','pc');
for k=1:length(t)/2
    E=1000*[real(wa) imag(wa)];
    E(:,3)=R*1000;
    filename=['Almat' num2str(k) '.txt'];
    dlmwrite(filename,E(k,:),'-append','delimiter','\t','precision',4,'newline','pc')
end

%% Grafico de perfil
Perfil=figure('name',['Perfil R = ' num2str(R)]);
ejes=axes(...
    'Visible','on',...
    'Box','on',...
    'DataAspectRatioMode','manual',...
    'DataAspectRatio',[1 1 1],...
    'Parent',Perfil);
xlabel('x [mm]');
ylabel('y [mm]');
hold on
plot(real(wp)*1000,imag(wp)*1000,'Parent',ejes);
plot(real(wa)*1000,imag(wa)*1000,'-r','Parent',ejes);
hold off
```

Pala

Mass properties of Pala3 (Part Configuration - Default)

Output coordinate System: -- default --

Density = 7900 kilograms per cubic meter

Mass = 102451.36 kilograms

Volume = 12.968527 cubic meters

Surface area = 139.83828 meters²

Center of mass: (meters)

X = 0.29393554

Y = -0.14322289

Z = 19.886729

Principal axes of inertia and principal moments of inertia: (kilograms * square meters)

Taken at the center of mass.

Ix = (-0.0035066039, 0.0077259513, 0.99996401) Px = 22449.766

Iy = (0.89537773, -0.44525882, 0.0065800199) Py = 12281506

Iz = (0.44529363, 0.89536858, -0.0053562984) Pz = 12299873

Moments of inertia: (kilograms * square meters)

Taken at the center of mass and aligned with the output coordinate system.

Lxx = 12284997 Lxy = -7655.1791 Lxz = -42942.299

Lyx = -7655.1791 Lyy = 12295499 Lyz = 94797.548

Lzx = -42942.299 Lzy = 94797.548 Lzz = 23332.781

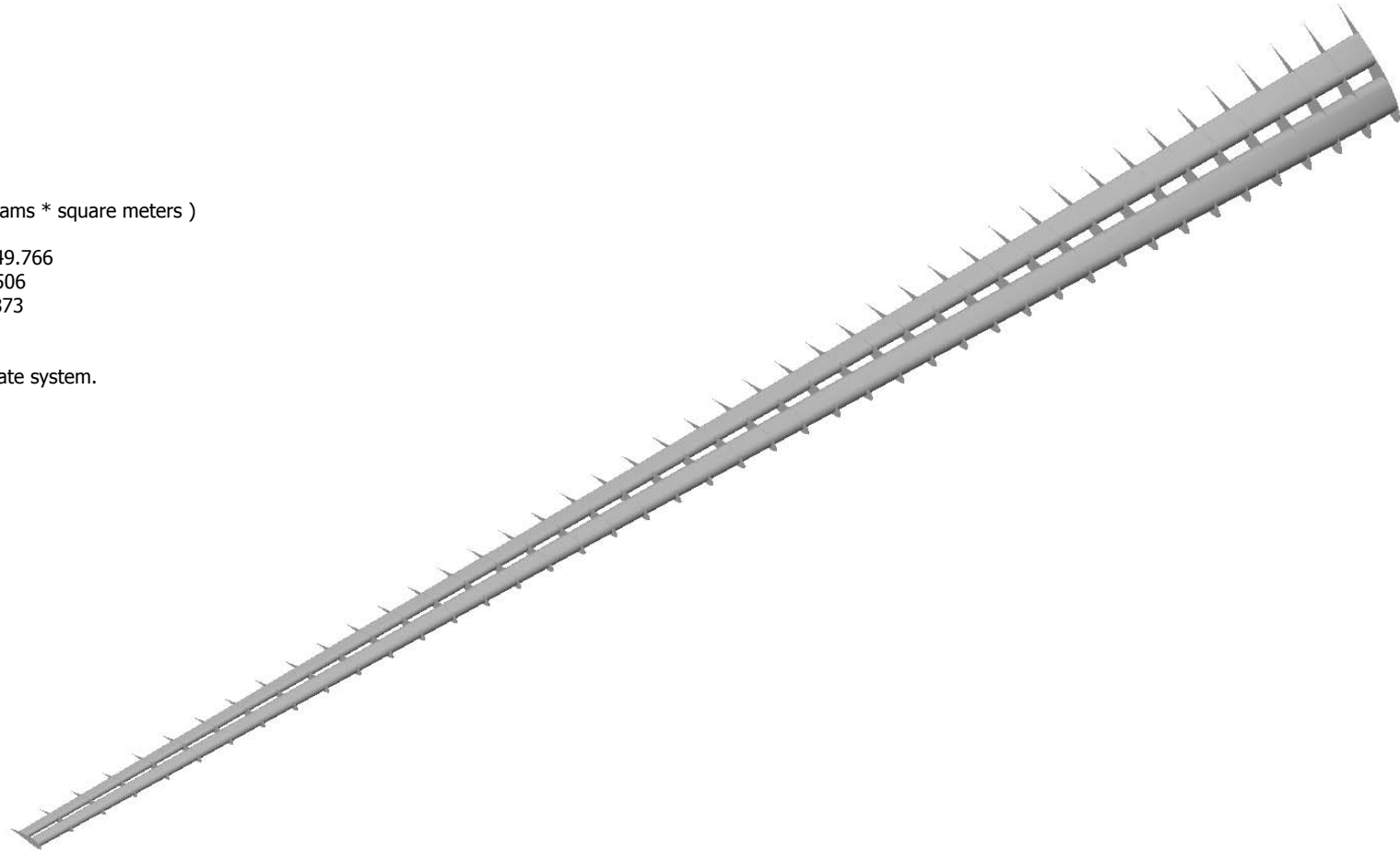
Moments of inertia: (kilograms * square meters)

Taken at the output coordinate system.

Ixx = 52804767 Ixy = -11968.207 Ixz = 555928.57

Iyx = -11968.207 Iyy = 52822019 Iyz = -197007.98

Izx = 555928.57 Izy = -197007.98 Izz = 34285.948



Pala, Sección R=5m

Measurements are based on sectioned model
Section properties of the selected faces of Pala3

Area = 0.62264829 meters²

Centroid relative to output coordinate system origin: (meters)

X = 0.2605922

Y = -0.35013616

Z = 5.011

Moments of inertia of the area, at the centroid: (meters ⁴)

Lxx = 0.13211298 Lxy = 0.09659872 Lxz = 0

Lyx = 0.09659872 Lyy = 0.084970669 Lyz = 0

Lzx = 0 Lzy = 0 Lzz = 0.21708365

Polar moment of inertia of the area, at the centroid = 0.21708365 meters ⁴

Angle between principal axes and part axes = 128.14358 degrees

Principal moments of inertia of the area, at the centroid: (meters ⁴)

Ix = 0.0091088732

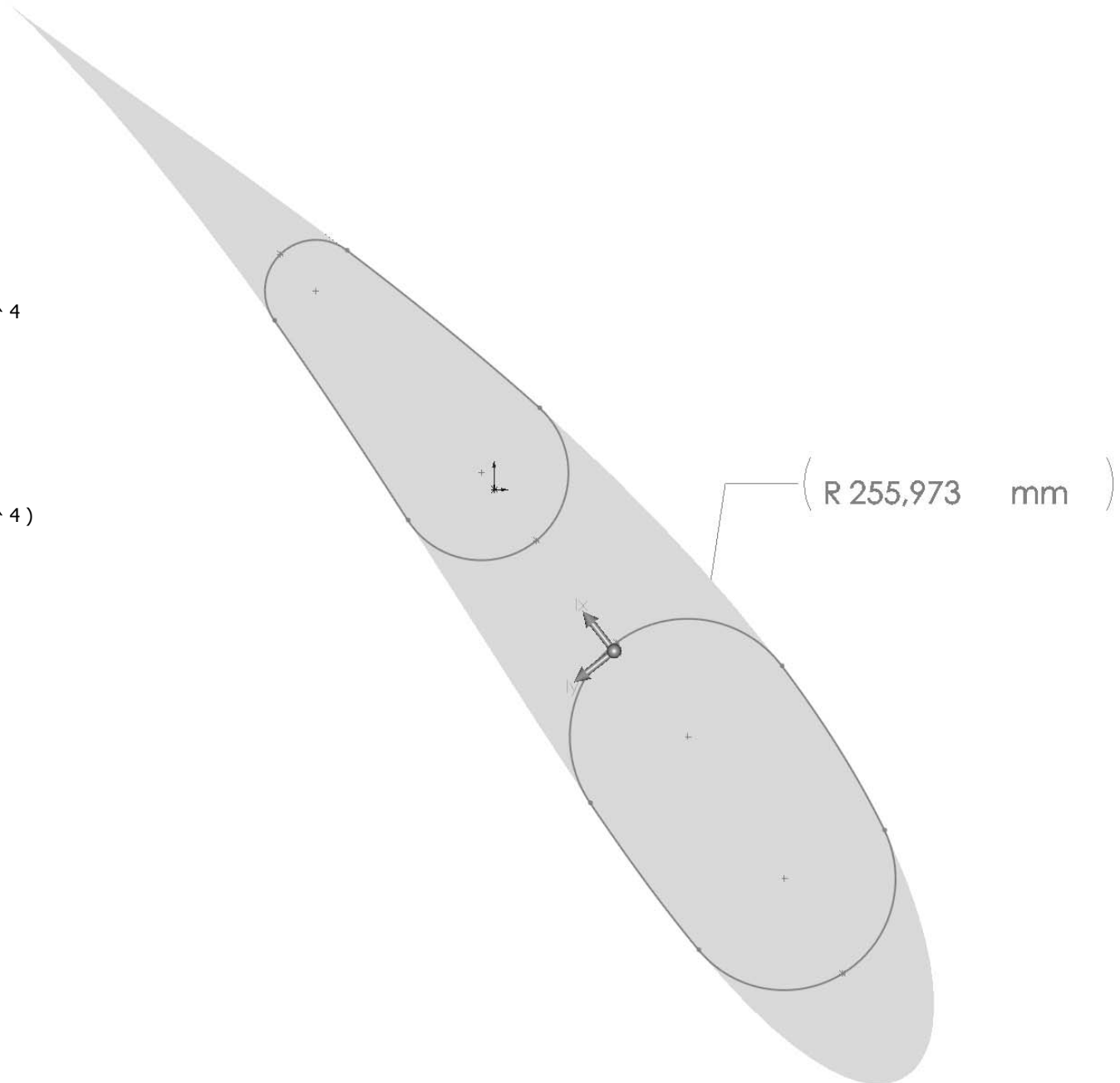
Iy = 0.20797478

Moments of inertia of the area, at the output coordinate system: (meters ⁴)

LXX = 15.843221 LXY = -0.15341086 LXZ = 0.81307126

LYX = -0.15341086 LYY = 15.762027 LYZ = -1.0924565

LZX = 0.81307126 LZY = -1.0924565 LZZ = 0.33570041



Pala, Sección media

Measurements are based on sectioned model
Section properties of the selected faces of Pala3

Area = 0.27680347 meters²

Centroid relative to output coordinate system origin: (meters)

X = 0.28286278

Y = -0.067887056

Z = 26.5

Moments of inertia of the area, at the centroid: (meters ⁴)

Lxx = 0.0035037569 Lxy = 0.0080034882 Lxz = 0

Lyx = 0.0080034882 Lyy = 0.039401072 Lyz = 0

Lzx = 0 Lzy = 0 Lzz = 0.042904829

Polar moment of inertia of the area, at the centroid = 0.042904829 meters ⁴

Angle between principal axes and part axes = -12.016288 degrees

Principal moments of inertia of the area, at the centroid: (meters ⁴)

Ix = 0.0018001848

Iy = 0.041104644

Moments of inertia of the area, at the output coordinate system: (meters ⁴)

LXX = 194.39001 LXY = -0.013318868 LXZ = 2.0748811

LYX = -0.013318868 LYY = 194.44678 LYZ = -0.49797137

LZX = 2.0748811 LZY = -0.49797137 LZZ = 0.066327941

